



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$ et $K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

- La droite (CK) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que \overrightarrow{CM} et \overrightarrow{CK} soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{CM} = t \cdot \overrightarrow{CK}$ où $t \in \mathbf{R}$.

$$\overrightarrow{CM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \\ z_M - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} \text{ et celles de } \overrightarrow{CK} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_K - x_C \\ y_K - y_C \\ z_K - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CM} = t \cdot \overrightarrow{CK} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -t+1 \end{cases}$$

La droite (CK) a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ y = -t+1 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$

2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t . Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{3}{2}t, -t+1\right)$

$$\begin{aligned} OM(t)^2 &= (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 + (z_M - z_O)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (-t+1)^2 \\ &= \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1 = 4t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

Donc : $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbf{R} par $f(t) = OM(t)$.

a. $f(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$ donc $f'(t) = \frac{8t - 2}{2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}$

On étudie le signe de $f'(t)$ sur \mathbf{R} .

t	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$8t - 2$	-	0	+
$2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}$	+		+
$f'(t)$	-	0	+

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{4}]$, et strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, +\infty[$.

- b. On en déduit que f atteint son minimum pour $t = \frac{1}{4}$.

4. Le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) est le point M de la droite (CK) tel que la distance OM soit minimale; le point de la droite (CK) réalisant ce minimum correspond donc à $t = \frac{1}{4}$.

C'est donc le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + 1\right)$ soit $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK); on l'appelle H.

5. On montre que H appartient au plan (ABC).

• \overrightarrow{AK} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ et celles de \overrightarrow{AB} sont $\begin{pmatrix} 0 - 2\sqrt{3} \\ 2 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points A, K et B sont alignés donc $K \in (AB)$.

• On a : $\left. \begin{array}{l} K \in (AB) \\ (AB) \subset (ABC) \end{array} \right\} \implies K \in (ABC) \implies (CK) \subset (ABC)$

- On a : $\left. \begin{array}{l} H \in (CK) \\ (CK) \subset (ABC) \end{array} \right\} \implies H \in (ABC)$

Donc H est un point du plan (ABC).

On montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.

- $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times (-2\sqrt{3}) + \frac{3}{8} \times 2 + (-\frac{1}{4}) \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AB}$ donc $(CK) \perp (AB)$.

Comme $H \in (CK)$, on en déduit que $(CH) \perp (AB)$.

- \overrightarrow{AH} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} - 0 \\ \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{8}\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et celles de \overrightarrow{BC} sont $\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{15}{8}\sqrt{3} \times 0 + \frac{3}{8} \times (-2) + \frac{3}{4} \times 1 = 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \text{ donc } (AH) \perp (BC).$$

(AH) et (CH) sont donc deux hauteurs du triangle (ABC) donc H est l'orthocentre de ce triangle.

6. a. On démontre que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- On sait que $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CK}$.
- $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times (-2\sqrt{3}) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$.
- Les vecteurs \overrightarrow{CK} et \overrightarrow{AB} ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Le vecteur \overrightarrow{OH} est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC). Donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- b. D'après le cours, si le vecteur \vec{v} de coordonnées (a, b, c) est normal à un plan \mathcal{P} , alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{OH} \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4} \right)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc le plan (ABC) a une équation de la forme $\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + d = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} + 3y + 6z + 8d = 0$.

On détermine la valeur de d en exprimant que le point A appartient au plan (ABC).

$$\begin{aligned} A \in (ABC) &\iff x_A\sqrt{3} + 3y_A + 6z_A + 8d = 0 \iff 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3 \times 0 + 6 \times 0 + 8d = 0 \\ &\iff 6 + 8d = 0 \iff 8d = -6 \end{aligned}$$

Le plan (ABC) a pour équation : $x\sqrt{3} + 3y + 6z - 6 = 0$.

7. (CK) est une hauteur du triangle (ABC) donc l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2} CK \times AB$.

- Le vecteur \overrightarrow{CK} a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right)$ donc :

$$\overrightarrow{CK}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 4 \text{ donc } CK = 2.$$

- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(-2\sqrt{3}, 2, 0)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}^2 = (-2\sqrt{3})^2 + (2)^2 + (0)^2 = 12 + 4 + 0 = 16 \text{ donc } AB = 4.$$

L'aire du triangle (ABC) est donc égale, en unités d'aire, à : $\frac{1}{2} \times 2 \times 4$ soit 4.